

Slnčná aktivita a nízkodimenzionálny chaos

Vladimír Karlovský, Hvezdáreň a planetárium Hlohovec, astrokar@gmail.com

Abstrakt

Detailná analýza časových radov koronálneho indexu, relatívneho čísla slnečných škvŕn a erupčného indexu ukazuje, že slnečná aktivita je deterministický nízkodimenzionálny chaos. Predpovedateľnosť koronálneho indexu je 4,8 roka a relatívneho čísla slnečných škvŕn 3,0 roka.

1. ÚVOD

Existuje viacero prác, ktoré sa zaoberajú slnečnou aktivitou ako deterministickým chaosom. Medzi ne patria práce autorov: Karlovský (1992), Kremliovský (1994), Kurths a Herzel (1987). Karlovský (1992) ukázal aplikovateľnosť chaotických atraktorov na slnečnú aktivitu a upozornil na fraktálnu štruktúru aktivity charakterizovanej časovým radom relatívneho čísla. Kremliovky (1994) na časovom rade relatívneho čísla ukázal, že slnečná aktivita je deterministický nízkodimenzionálny proces. Vzhľadom na to, že okrem relatívneho čísla sú k dispozícii aj časové rady koronálneho indexu a erupčného indexu, urobili sme analýzu aj týchto radov. Tým je možné si urobiť komplexnejší obraz o slnečnej aktivite.

2. ČASOVÉ RADY SLNEČNEJ AKTIVITY

Na analýzu boli použité časové rady:

a – relatívneho čísla slnečných škvŕn

vyrovnané mesačné priemery, Waldmeier (1955), Neubauer (1970)

b – koronálneho indexu

priemerné denné hodnoty, Rybanský a Rušín (1983)

Rybanský, Rušín, Dzfčáková (1988)

Rybanský (1995)

c – erupčného indexu LDE erupcií

mesačné hodnoty, Antalová (1990), Kučera (1995)

3. ANALÝZA DÁT

Všetky dáta prešli najprv fourierovskou analýzou, aby sa zistilo, či v dátach existujú periodické, kváziperiodické, alebo aperiodické členy. Charakter fourierovského spektra je indikátorom procesov a môže naznačovať aj fraktálnu štruktúru, Osborne a Provenzale (1989).

4. NELINEÁRNE METÓDY

4.1. Rekonštrukcia fázového priestoru

Po uplynutí dostatočne dlhej doby sa chovanie systému sústreďuje na atraktor, ktorého projekciou do jednej dimenzie vznikol meraný signál $x(t)$, $x(t)$ je fázová premenná. Časové rady slnečnej aktivity sú vlastne jednorozmerným signálom. Avšak i takýto časový rad obsahuje v sebe informácie o celom systéme, Voros (1994). Pomocou procedúry vytvorenej Packardom (1980) a Takensom (1981), môžeme rekonštruovať n -rozmernú dynamiku systému z jednorozmerného signálu (časového radu). Vytvoríme nový dynamický systém dimenzie m tak, že zo skalárnej časovej série $X_i = X(t_i)$ $i=1,2,\dots,N$ pomocou časového posunu τ dostaneme stavový vektor $\mathbf{X}_i = (X(t_i), X(t_i + \tau), \dots, X(t_i + (m-1)\tau))$. Takensova veta hovorí, že pri ľubovoľných hodnotách realizácie radu X_i a časového posunu atraktor rekonštruovaného dynamického systému dimenzie m bude mať tie isté vlastnosti ako pôvodný ak $m \geq 2d_H + 1$, kde d_H je Hausdorffova dimenzia pôvodného atraktora. Celková stratégia zisťovania fraktálnej dimenzie bola rozpracovaná Grassbergerom a Procaccia (1984). Na základe zistenia dynamických invariantov, ako sú fraktálna dimenzia, Kolmogorovská entropia (K_2), Ljapunovské exponenty, možno rozhodnúť, či sa za signálom skrýva podivný atraktor a či sa jedná o deterministický chaos, alebo nie. Rekonštrukcia vychádza z predpokladu existencie dynamického systému, ktorý generuje pohyb na atraktore.

4.1.1 Metóda autokorelačnej funkcie (ACF)

Keď použijeme autokorelačnú funkciu (ACF), môžeme nájsť časový posun τ tam, kde autokorelačná funkcia dosahuje hodnotu $1/e$, alebo kde je prvý nulový bod tejto funkcie. Presnejšie je časový posun z intervalu $\langle ACF(1/e), ACF(0) \rangle$. Táto metóda nie je vhodná pre systémy s vyššou korelačnou dimenziou D_2 . Voľba τ zaručuje nezávislosť súradníc rekonštruovaného fázového priestoru.

4.1.2 Metóda pseudocyklu

Ďalším kritériom pre nájdenie τ môže byť hodnota 25% pseudocyklu (charakteristického času T_{CH}), Buzug a Pfister (1992). Vo všeobecnosti korelačná dimenzia by nemala byť na τ závislá. Pre nízkodimenzionálne systémy dáva metóda pseudocyklu približne tie isté hodnoty ako metóda ACF.

4.2 Redukcia šumu

V prípade zašumených dát je možné použiť redukciu šumu, Schreiber (1993). V našom prípade nebolo potrebné urobiť redukciu šumu, pretože boli použité v relatívnom čísle vyrovnané mesačné priemery, v korunálnom indexe priemerné denné hodnoty a pri erupčnom indexe mesačné súčty. V týchto prípadoch sú hodnoty šumu bezvýznamné.

4.2.1 Redukcia šumu NNR

Hlavná myšlienka NNR (nonlinear noise reduction) techniky spočíva v tom, aby sme zamenili každé meranie X_i strednou hodnotou tejto súradnice v bodoch zodpovedajúco vybranej oblasti polomeru ρ . Okolia sú definované v rekonštruovanom fázovom priestore a k sú súradnice z minulého a budúceho okolia, tieto sa používajú na zostrojenie vektorov \mathbf{X}_i . Potom súradnice X_i sú zamenené za stredné hodnoty v U_i :

$$X_i \longrightarrow X_i^{corr} = (1/|U_i^p|) \sum_{U_i^p} X_i$$

Kde U_i je súbor všetkých susedov pre ktoré platí:

$$\|X_j - X_i\|_{sup} < \rho$$

V každom prípade je nutné presne sledovať efekt čistenia. Preto vždy uskutočníme niekoľko realizácií očistených dát časových sekvencií $\{NNR(k,\rho) X_i\}$ a iba tie parametre k a ρ sa používajú v ďalších výpočtoch, pre ktoré je určená korelačná dimenzia rovnakej hodnoty (pre všetky sekvencie má byť rovnaká), včetně hodnôt chýb. Treba tiež sledovať deformácie výkonového spektra kvôli prílišnej filtrácii. Je nutné zabrániť objaveniu sa falošných pík a tiež falošných nízkych dimenzií.

4.3. KORELAČNÁ DIMENZIA

Jedným z dynamických invariantov je aj fraktálna dimenzia systému (kapacita) D_0 . Dôležitá je korelačná dimenzia D_2 , pretože bezprostredný výpočet fraktálnej dimenzie, alebo Hausdorffovej dimenzie je veľmi zložitý. Platí:

$$D_0 \Rightarrow D_1 \Rightarrow D_2$$

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_q(\epsilon) / \ln(\epsilon^{-1}) \quad [1]$$

kde $I_q(\epsilon)$ je entropia Renyi rádu q , Renyi (1970), D_0 je fraktálna dimenzia, D_1 je informačná dimenzia, D_2 je korelačná dimenzia, ϵ je rozmer $n - \text{rozmernej gule v } n\text{-rozmernom priestore}$, pričom týmito guľami pokrývame skúmanú množinu.

Korelačná dimenzia D_2 sa určuje pomocou korelačného integrálu:

$$C_m(\epsilon) = \kappa * \sum_{j=W}^N \sum_{i=1}^{N-j} \Theta(\epsilon - |x_i^m - x_{i+j}^m|) \approx \epsilon^{D_2(m)} \quad [2]$$

Θ je stupňová funkcia Heavisidia, $\Theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{pre } z < 0 \\ 1 & \text{pre } z > 0 \end{cases}$

$$\kappa = 2 / ((N - W) * (N - W + 1))$$

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln C_m(\epsilon) / \ln \epsilon) \quad [3]$$

N je počet dát, Θ je Heavisidiová funkcia, m je vnorená dimenzia, W je počet vylúčených dát pre ktoré platí:

že $|i - j| \delta t$ ($\delta t = t_{i+1} - t_i$) je menší ako autokorelačný čas, je to korekcia na nepravé korelácie, Theiler (1986).

Vlastné výpočty korelačnej dimenzie, Kolmogorovskej entropie a najväčších Ljapunovských exponentov boli vypočítané pomocou algoritmov uvedených Wolfom a ďalšími (1985) a pomocou programov softwarového balíka TISEAN, ktorý je prístupný na adrese:

<http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/>

Veľkosť balíka TISEAN 2.1 je 8 MB. Niektoré podrobnosti o výpočte korelačnej dimenzie možno nájsť aj v knihe Neymarka a Landu (1987).

4.3.1 Test náhradných dát

Na test náhodne rozložíme fázy fourierovskej transformácie originálneho časového radu a vytvoríme niekoľko realizácií invertovaných náhradných dát, pričom použijeme tú istú autokorelačnú metódu. keď opäť vypočítame D_2 a výsledky nie sú významne rozdielne od originálneho časového radu, určeníu dimenzie nemožno dôverovať, Roberts (1991).

4.3.2 Fraktálny test

Signál (časový rad) je sebedobný, ak

$$\langle |X(t_i + \Omega \delta t) - X(t_i)| \rangle = \Omega^H \langle |X(t_i + \delta t) - X(t_i)| \rangle \quad [4]$$

pozri Osborne a Provenzale (1989), symbol $\langle \rangle$ indikuje časový priemer, H je škálovací exponent, Ω je škálovací faktor. Vytvoríme graf $\log \langle |X(t_i + \Omega \delta t) - X(t_i)| \rangle$ versus $\log \Omega$. Ak v tomto grafe nájdeme vodorovnú časť krivky, sú dáta všetky sebedobné a jedná sa na danej časti o šum a v tomto prípade majú dáta charakter farebného šumu a tiež konečnú dimenziu, ale určeníu korelačnej dimenzie nemožno dôverovať.

4.4. Najväčší Ljapunovský exponent

Všetky trajektórie vytvárajúce chaotický, alebo stochastický atraktor, sú nestabilné podľa Ljapunova vtedy, ak majú aspoň jeden kladný Ljapunovský exponent. Existencia kladného Ljapunovského exponentu je základným kritériom chaotičnosti pohybu. Maximálny Ljapunovský exponent pre trajektóriu na intervale $t_0 \leq t_M \leq T$ je

$$\Lambda_{\max} = (1 / (t_M - t_0)) * \sum_{i=1}^M \log_2 (L'(t_i) / L(t_i - 1)) \quad \text{bitov/sek.} \quad [5]$$

Pozri Wolf a ďalší (1985). $L(t_i)$ označuje vzdialenosť dvoch oddelených blízkych trajektórií v rekonštruovanom fázovom priestore, $L(t_0)$ je vzdialenosť medzi dvoma počiatocnými bodmi. Počiatocná dĺžka sa môže vyvinúť na $L'(t_i)$ atď. Počet krokov je M a náhradné vektory sú reortogonalizované Gramm-Schmidtovou procedúrou. Predpovedateľnosť môže byť určená ako :

$$T_p \approx \log_2 2 / \Lambda_{\max} = 1 / \Lambda_{\max}$$

Alebo ako uvádza Boffetta G., et al 1998:

$$T_p \approx (1 / \Lambda_{\max}) \ln (\Delta / \delta) \quad [6]$$

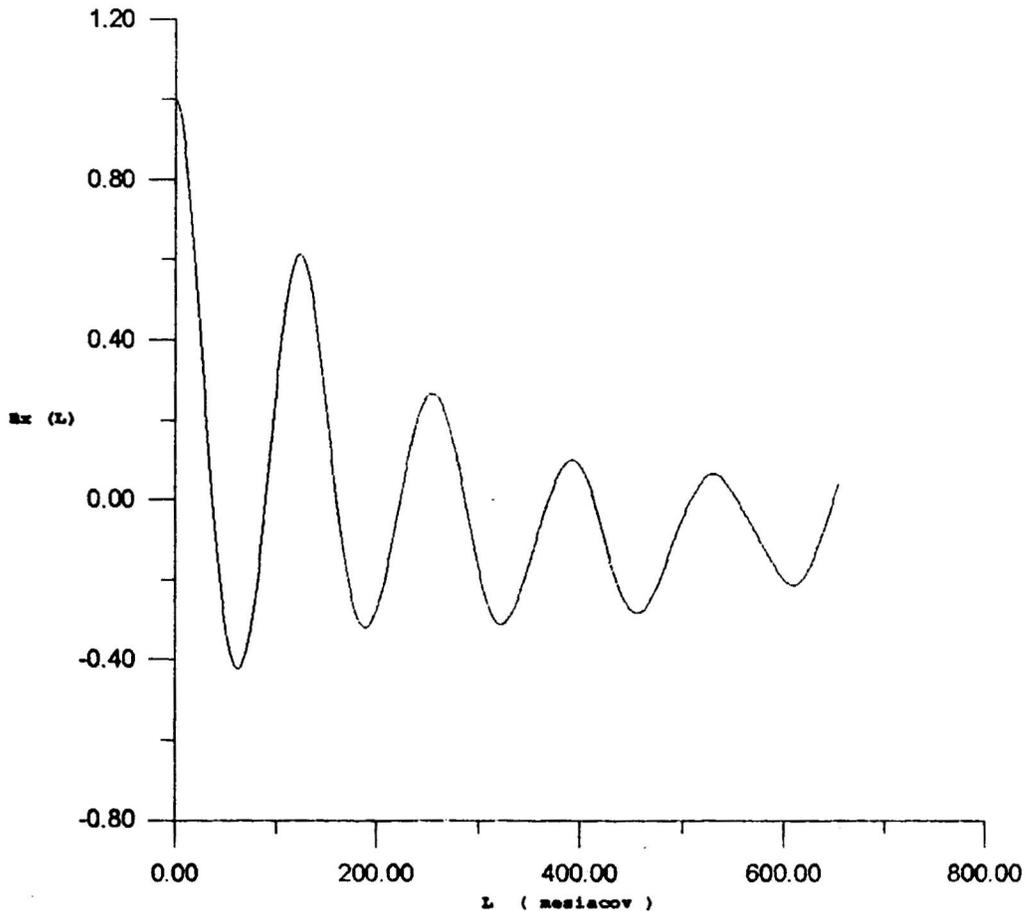
Kde δ je konečná nepresnosť počiatocných podmienok, Δ je presnosť budúceho stavu systému.

5. ANALÝZA KONKRÉTNÝCH ČASOVÝCH RADOV

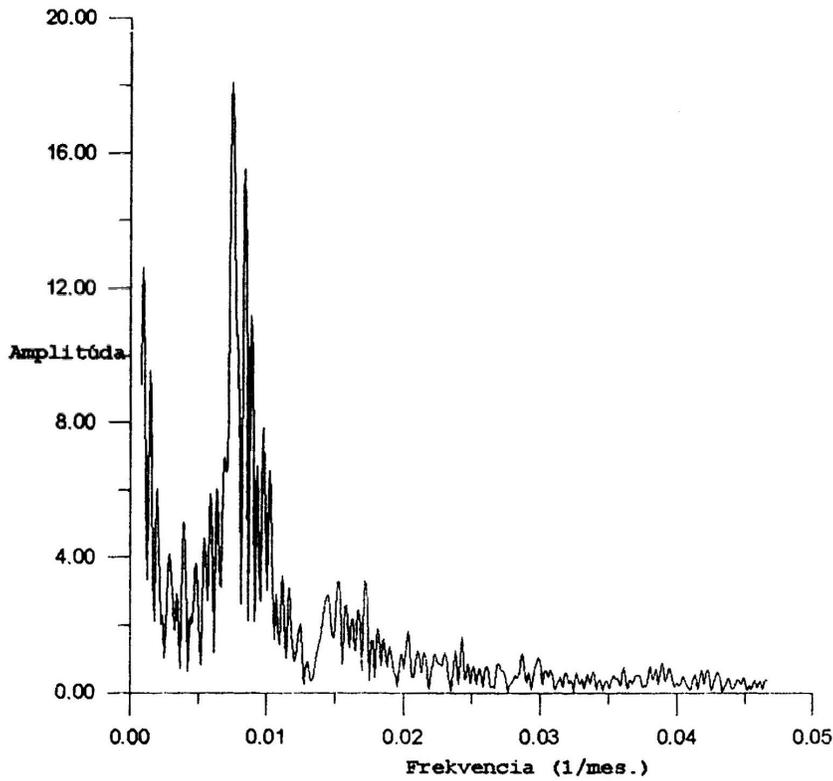
5.1. Analýza časového radu relatívneho čísla snečných škvŕn

Časový rad relatívneho čísla, mesačné vyrovnané priemery od roku 1750 po 1968, bol podrobený autokorelačnej analýze. Autokorelačnú funkciu (ACF) vidíme na obr.1 . Odtiaľ τ (škvŕny) $\approx (ACF(1/e) - ACF(0))_{skvrny} \approx 25 - 35$ mesiacov. Metóda pseudocyklu dáva $T_{CH} = 134 / 4 \approx 33$ mesiacov. Fourierovské spektrum vidíme na obr.2 . Výsledná korelačná dimenzia pre tento rad je $D_2 = 3.62 \pm 0.05$. Graf závislosti D_2 na $\ln \varepsilon$ vidíme na obr.3. Závislosť D_2 na časovom posune τ vidíme na obr.4, kde sa ukazuje, že dáta sú dostatočne robustné na určenie korelačnej dimenzie. Kontrolný test náhradných dát udáva dimenzie D_2 až o 1.5 odlišné od originálnych dát. Fraktálny test, obr.5 ukazuje, že dáta nepredstavujú šum a určenie D_2 je vierohodné. Okrem toho vidíme, že vrcholy jednotlivých maxím sú približne rovnako vysoké, čo svedčí o tom, že škvŕnová aktivita má určitú fraktálnu štruktúru. Fázový diagram pre tento prípad je na obr.6 s $\tau = 35$ mesiacov. Najväčší Ljapunovský exponent ako funkcia času a evolučného času vidíme na obr.7. Najväčší Ljapunovský exponent vychádza $\Lambda_{max} = 0.028 \pm 0.003$ bitov/mesiac. Predpovedateľnosť je $T_P = (1/\Lambda_{max}) = 35.71$ mesiacov ≈ 3 roky.

Autokorelačná funkcia Relatívne číslo

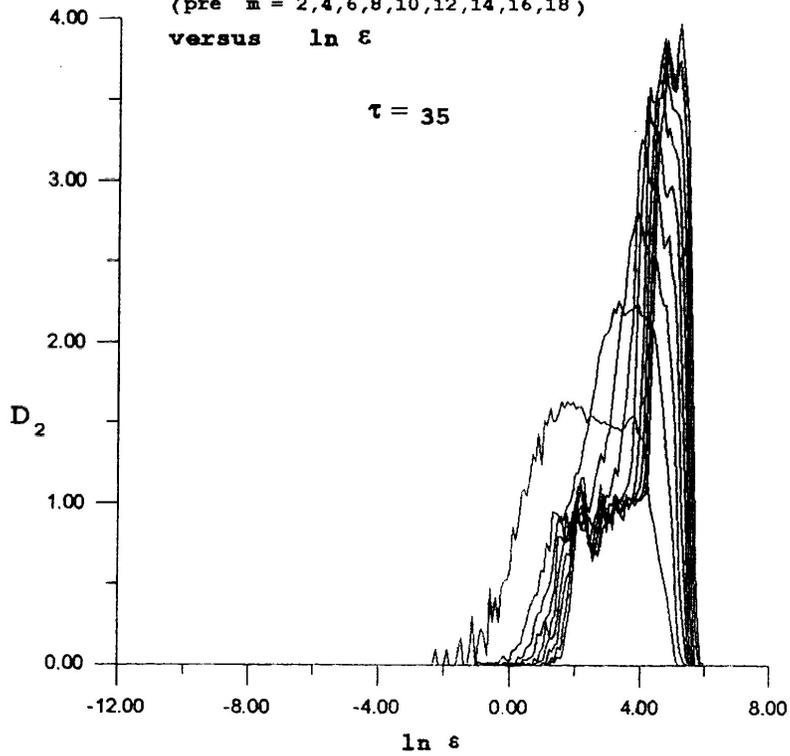


Fourierovská analýza slnečných relatívnych čísel



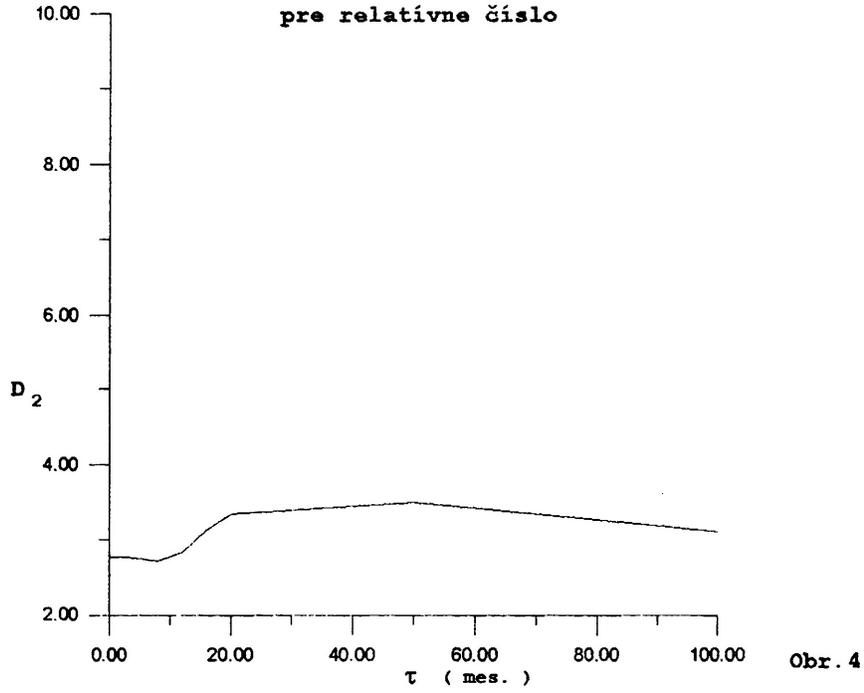
Obr. 2

Korelačná dimenzia pre relatívne číslo
(pre $m = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$)
versus $\ln \epsilon$

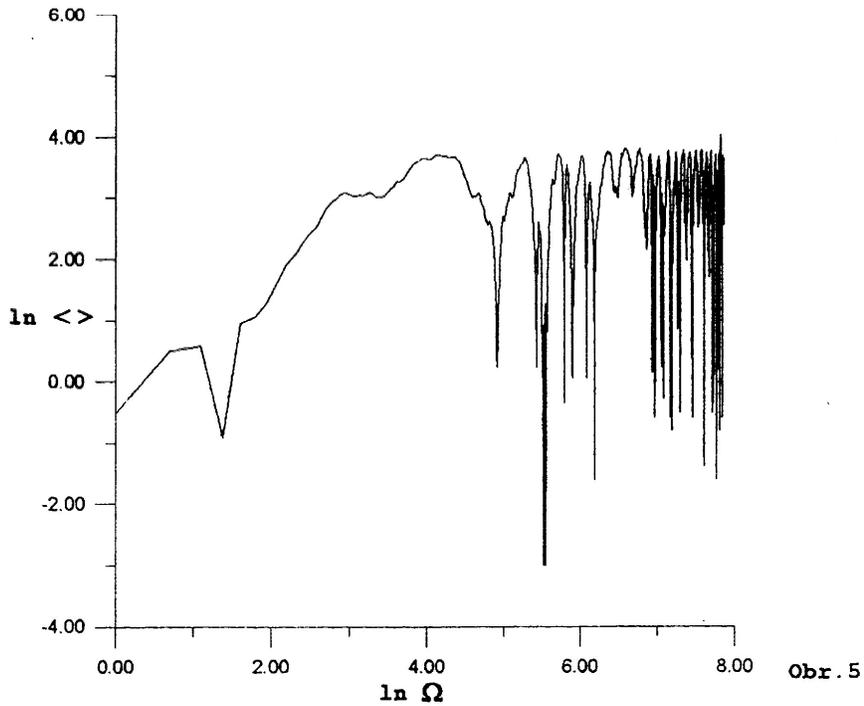


Obr. 3

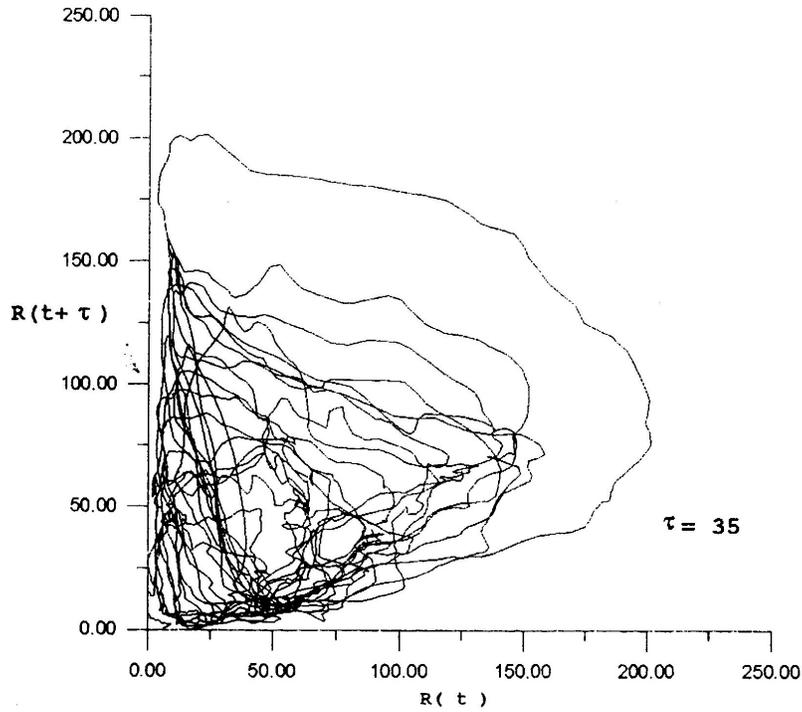
Korelačná dimenzia versus časový posun
pre relatívne číslo



Fraktálny test pre relatívne číslo



Fázový diagram pre relatívne číslo
slnečných škvŕn v rokoch 1750-1968



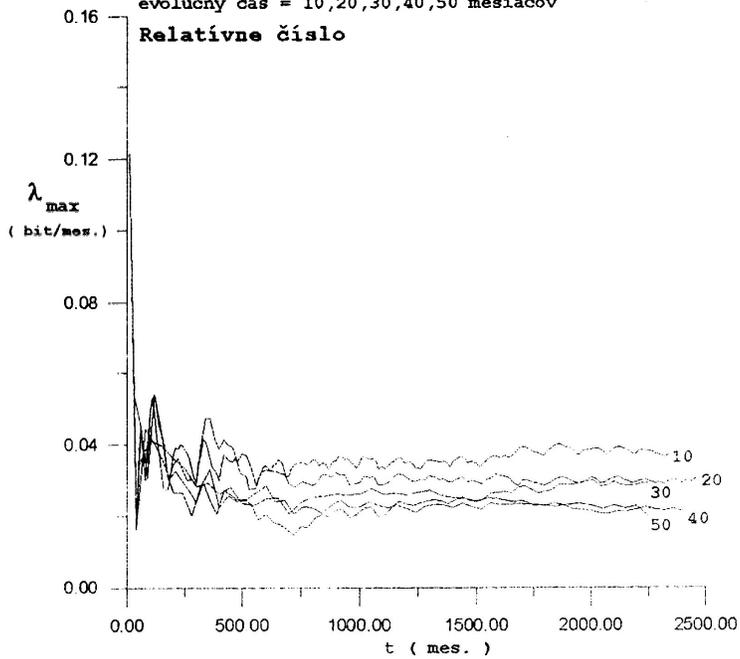
Obr. 6

Najväčší Lyapunovský exponent ako funkcia

času a evolučného času

evolučný čas = 10, 20, 30, 40, 50 mesiacov

Relatívne číslo

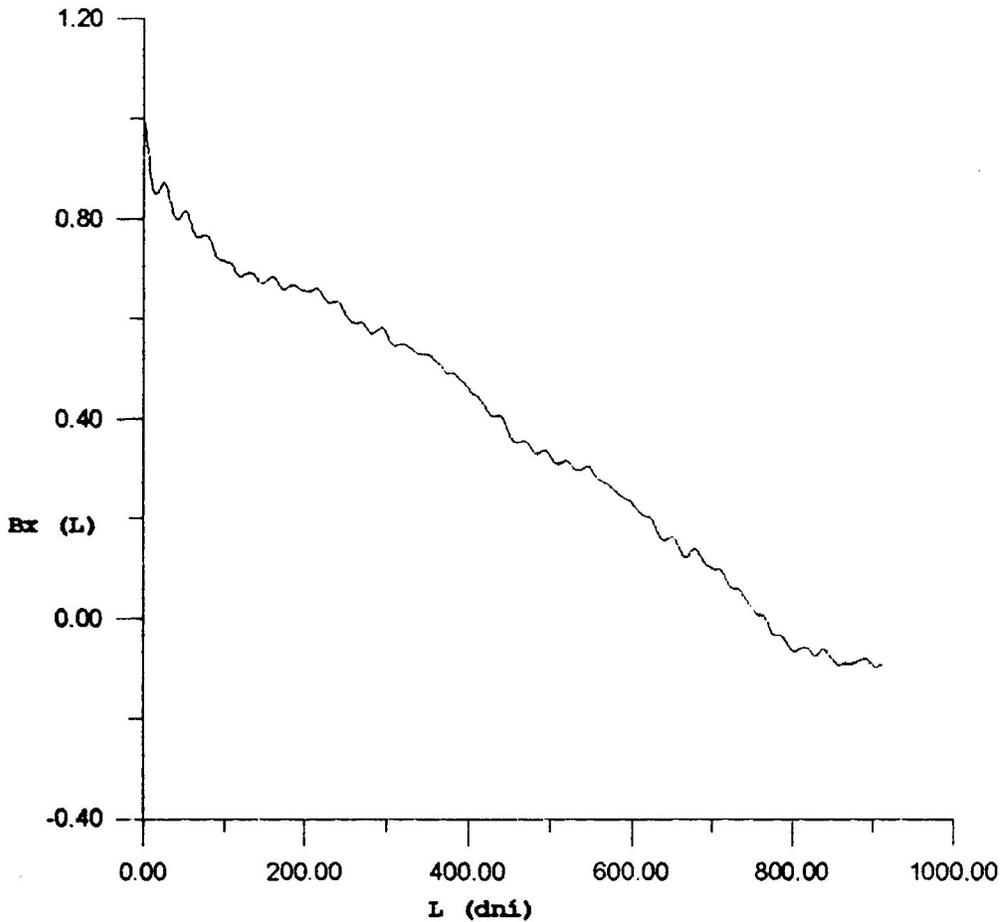


Obr. 7

5.2. ANALÝZA ČASOVÉHO RADU KORONÁLNEHO INDEXU

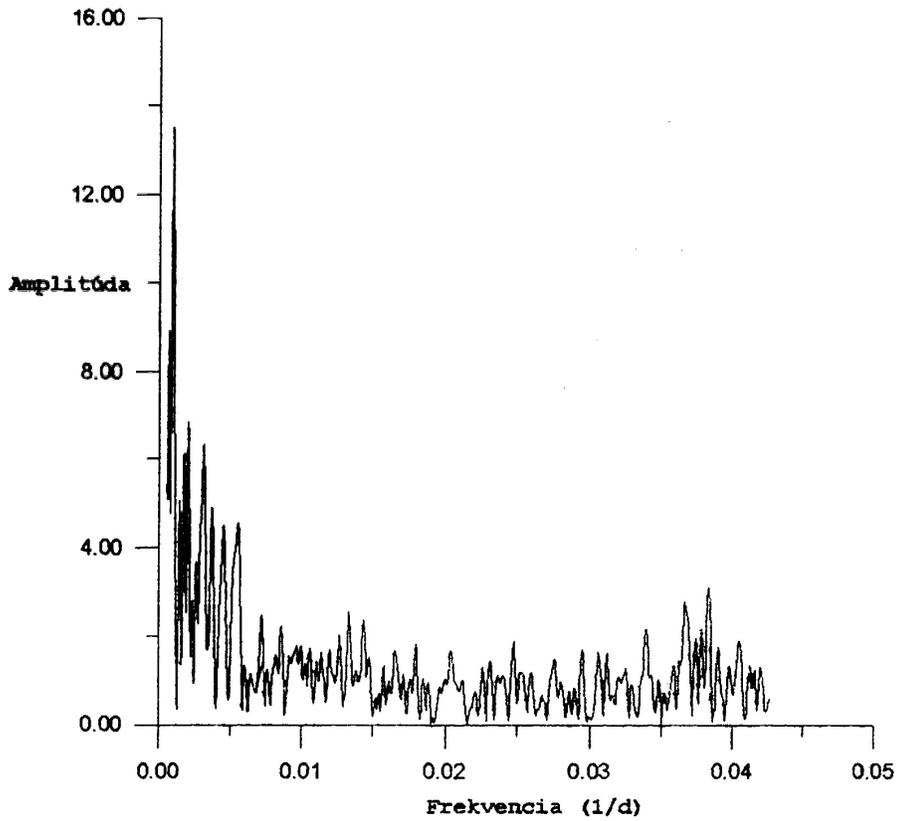
Časový rad koronálneho indexu od roku 1947 – 1993 obsahuje denné priemery koronálneho indexu. Celkove je to 17167 údajov. Bol podrobený autokorelačnej analýze. Autokorelačnú funkciu (ACF) vidíme na obr.8. τ (koróna) \approx (ACF(1/e) – ACF(0)) \approx 450 – 760 dní \approx 37 – 63 mesiacov. Metóda pseudocyklu dáva T_{CH} \approx 30 mesiacov. Fourierovské spektrum vidíme na obr.9. Výsledná korelačná dimenzia je $D_2 = 3.96 \pm 0.05$. Graf závislosti D_2 na $\ln \varepsilon$ ako príklad pre $\tau = 120$ dní je na obrázku 10. Závislosť D_2 na časovom posune τ vidíme na obr.11, kde sa ukazuje, že dáta sú dostatočne robustné na určenie korelačnej dimenzie. Kontrolný test náhradných dát udáva dimenzie D_2 až o 1.4 odlišné od originálnych dát. Fraktálny test, obr.12, ukazuje, že dáta nepredstavujú šum a určenie D_2 je vierohodné. Okrem toho vidíme, že vrcholy niektorých maxím sú približne rovnako vysoké, čo svedčí o tom, že koronálna aktivita má tiež určitú fraktálnu štruktúru v čase, avšak nie takú výraznú, ako škvrnová aktivita. Fázový diagram pre koronálny index je na obr.13 s $\tau = 760$ dní. Najväčší Ljapunovský exponent ako funkcia času a evolučného času vidíme na obr.14. Najväčší Ljapunovský exponent vychádza $\Lambda_{\max} = 0.00058 \pm 0.00006$ bitov / deň = 0.0174 \pm 0.0018 bitov / mesiac. Predpovedateľnosť vychádza $T_p = (1 / \Lambda_{\max}) = 57.47$ mesiacov = 4.8 roka.

Autokorelačná funkcia Koronálny index



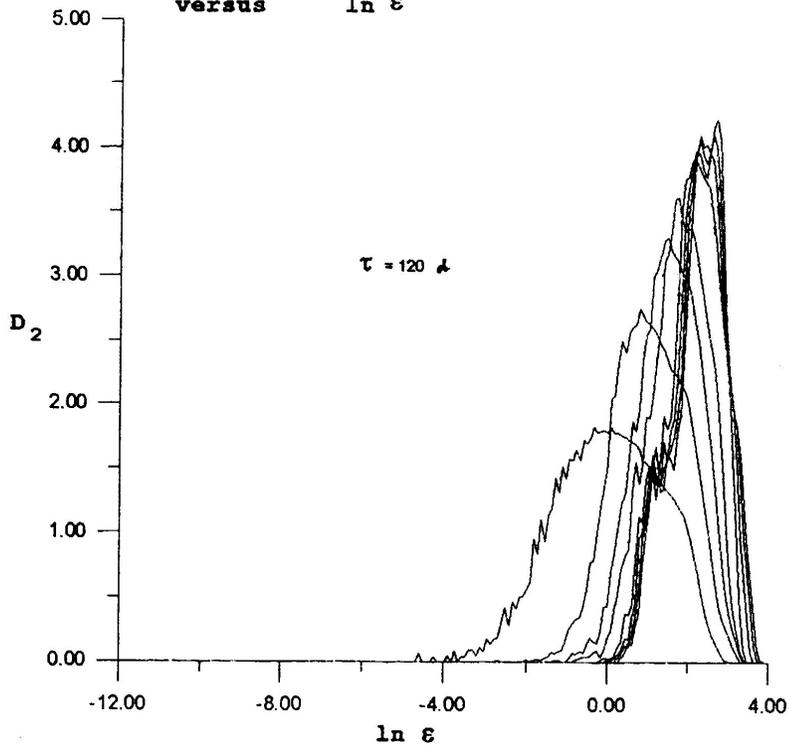
Obr. 8

Fourierovská analýza koronálneho indexu



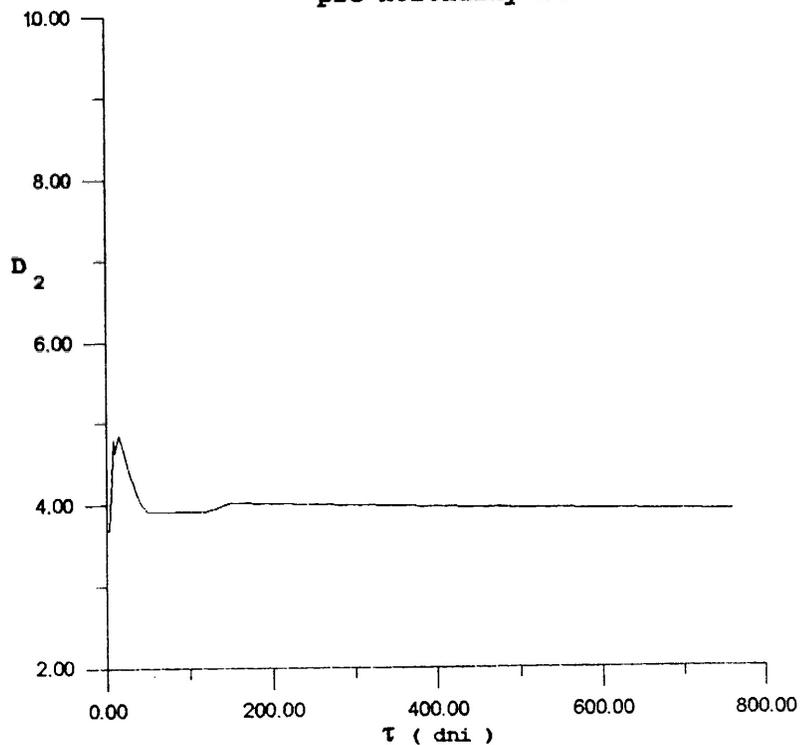
Obr. 9

Korelačná dimenzia pre koronálny index
(pre $m = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$)
versus $\ln \varepsilon$



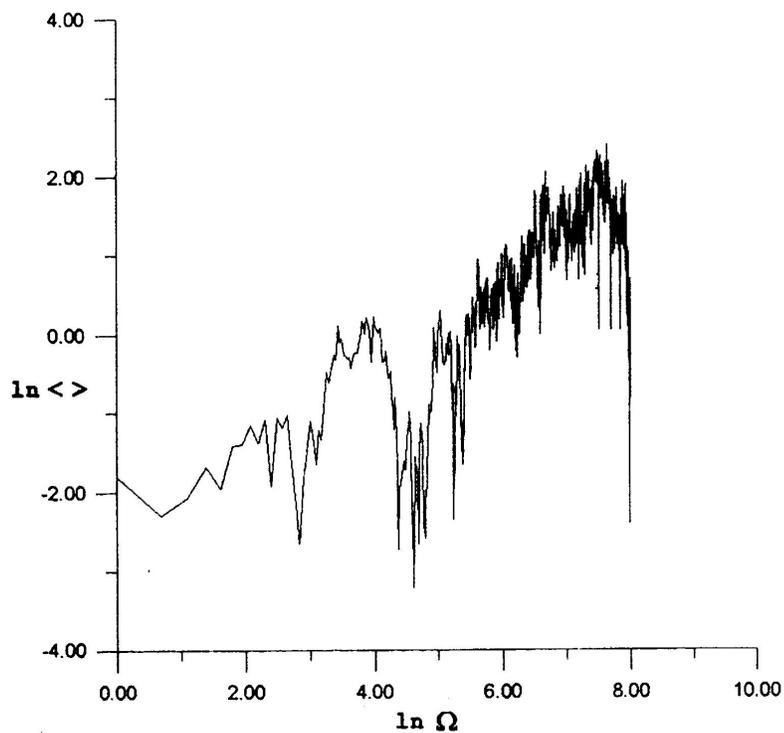
Obr. 10

Korelačná dimenzia versus časový posun
pre koronálny index



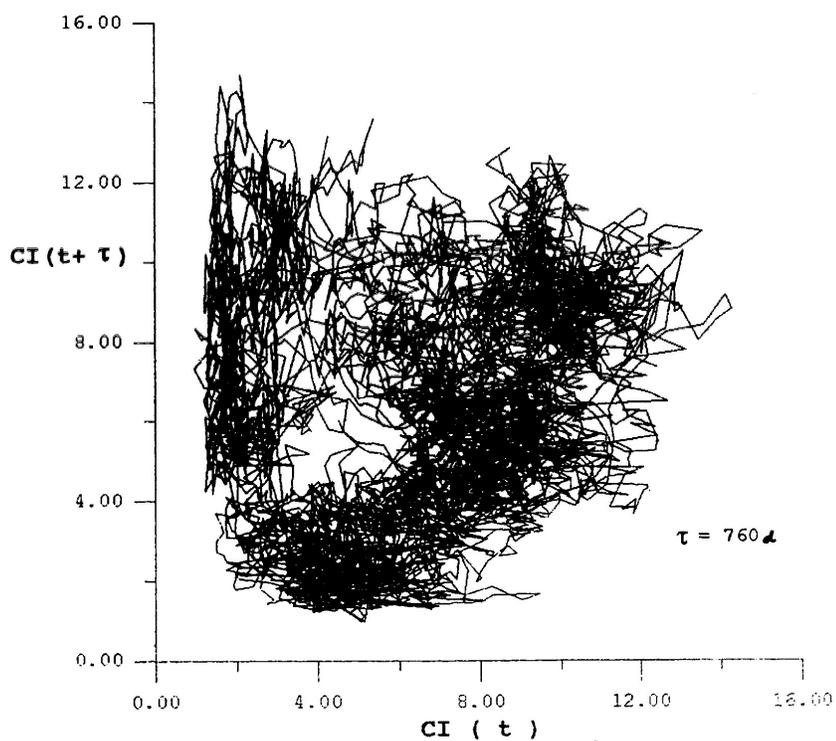
Obr. 11

Fraktálny test pre koronálny index



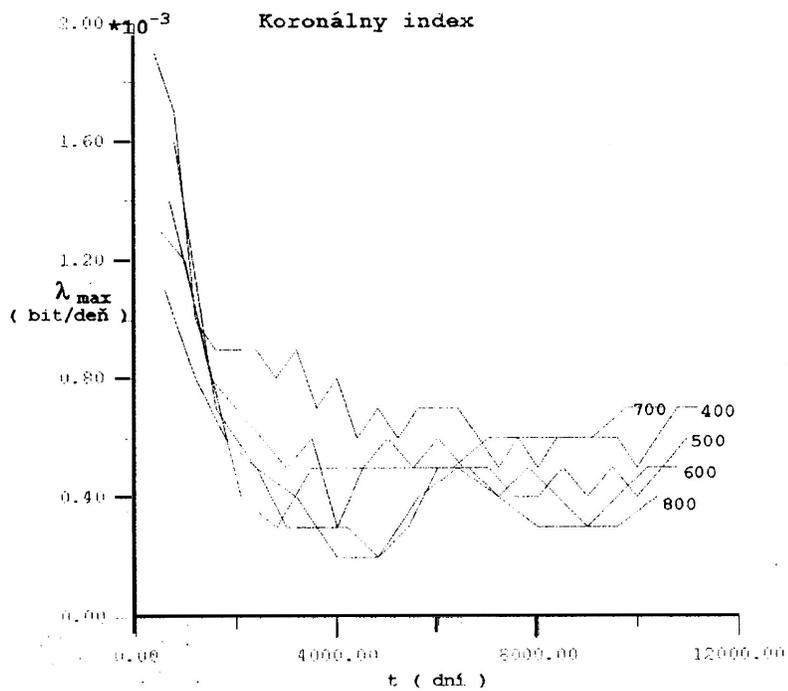
Obr. 12

Fázový diagram pre koronálny index
pre roky 1947-1993



Obr. 13

Najväčší Lyapunovský exponent ako funkcia
času a evolučného času
evolučný čas = 400,500,600,700,800 dní



Obr. 14

5.3. ANALÝZA ČASOVÉHO RADU ERUPČNÉHO INDEXU

5.3.1. Analýza časového radu erupčného indexu LDE Erupcií

Dáta boli publikované Antalovou (1990). Korelačná dimenzia D_2 sa pohybuje v intervale: $D_2 \approx 2.9$ až 4.0 . Údaje nie sú dostatočne robustné, je ich iba 255. Potrebných by bolo aspoň 10^3 až 10^4 údajov. Kolmogorovská entropia $K_2 = 0.02 \pm 0.02$ bitov / mesiac.

6. SÚHRN A DISKUSIA

Kolmogorovská entropia $K = \sum_1^m (\lambda_i^T)$, je to súčet všetkých kladných Ljapunovských exponentov.

Kolmogorovská entropia K_2 má tieto vlastnosti Voros (1994):

1. $K_2 \geq 0$
2. $K_2 \leq \Lambda_{\max}$
3. $K_2 > 0$ pre chaotické systémy

Ak K_2 je z intervalu $0 < K_2 \ll$ nekonečno, potom signalizuje deterministický chaos. Keď zhrnieme výsledky do tabuľky máme:

Index	K_2 (bit/mesiac)	Λ_{\max} (bit/mesiac)	D_2
R	0,028 +/- 0,003	0,028 +/- 0,003	3,62 +/- 0,05
CI	0,016 +/- 0,002	0,018 +/- 0,002	3,96 +/- 0,05
LDE	0,02 +/- 0,02		2,7 až 4,0

R – Wolfovo relatívne číslo slnečných škvŕn, CI – Koronálny index, LDE – erupčný index LDE erupcií.

Hodnoty K_2 a Λ_{\max} ukazujú, že pri slnečnej aktivite máme do činenia s deterministickým chaosom, pričom na charakterizovanie potrebujeme v prípade slnečných škvŕn a koronálneho indexu 7 až 9 parametrov. Kremliovsky (1994) tvrdí, že sa jedná o nízko-dimenzionálny proces s približne periodickým členom, ktorý bežne nazývame slnečný cyklus. Kremliovsky sa zaoberal však iba relatívnym číslom. Pretože slnečná aktivita charakterizovaná relatívnym číslom, koronálnym indexom alebo erupčným indexom má takmer to isté chovanie, je naozaj prejavom nízko-dimenzionálneho chaosu. Predpovedateľnosť aktivity nie je príliš veľká, pri škvŕnovej aktivite 3,0 roka a pri koronálnom indexe 4,8 roka. Dlhodobé predpovede preto môžu byť iba kvalitatívne a majú len hodnotu odhadu.

PodĎakovanie

Na záver by som chcel poďakovať RNDr. Milanovi Rybanskému DrSc a RNDr. Anne Antalovej DrSc za poskytnutie dát pre analýzy, ktoré boli získané na Astronomickom ústave SAV v Tatranskej Lomnici a tiež RNDr. Zoltánovi Vorosovi za cenné diskusie na tému deterministického chaosu.

Literatúra

- Antalová A., 1990 Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso 19, 145-182
- Boffetta. G., Giuliani P., Paladin G., Vulpiani A., 1998 An extension of the Ljapunov analysis for the predictability problem. <http://arXiv.org/abs/chao-dyn/9801030/>
- Buzug Th. Pfister G., 1992 Optimal delay time and embedding dimension for delay time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors. Phys.Rev. A 45, 7073-7084
- Grassberger P., Procaccia I., 1984 Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach. Physica D, 13, 285-317
- Horák J., Krlín L., 1996 Deterministický chaos a matematické modely turbulence. Academia 1996, Praha
- Karlovský V., 1992 Slnecná aktivita a chaotické atraktory. Zborník referátov z 10.celoštátneho slnečného Seminára, SÚH Hurbanovo, 63-70
- Kolomogorov A.N., Petrovskij G.I., Piskunov N.S., Izučnrije uravnenia difuzii s istočnikom veščestva i ego priloženia k biologičeskim problemam, Bulletin MGU Matematika a mechanika 1937
- Kolmogorov A.N., 1959 Ob entropii na jedinicu vremeni, kak mehaničeskom invariante avtomorfizmov DAN SSSR, T124, s.754-785
- Kremliovsky M.N., 1994 Solar Physics, 151, 351-370
- Kučera A., 1995 Personal Communocations
- Kurths J., Herzelt H., 1987 An attractor in a solar time series, Physica D, 25, 165-172, North-Holland,Amsterdam
- Neubauer M., 1970 Bulletin pro pozorování Slunce hvězdárny ve Valašském Meziříčí 9, 7-22
- Neymark J.I., Landa D.S., 1987 Stochastičeskije i chaotičeskije kolebania, Moskva ,vyd,Nauka
- Osborne A.R., Provenzale A., 1989 Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, Physica D, 35, 357-381
- Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S., 1980 Geometry from a Time series Phys.Rev.Lett., Vol.45, 9, 712-716
- Renyi A., 1970 Probability Theory, Amsterdam, North-Holland
- Roberts D.A., 1991 Is there a strange attractor in the magnetosphere?, J.Geophys.Res., 96, 16031-16046
- Rybanský M., Rušín V., 1983 Bull.Astron.Inst.Czechosl., 34, 79-92
- Rybanský M., Rušín V., Dzifčáková E.,1988 Bull.Astron.Inst.Czechosl., 39,106-119
- Rybanský M., 1995 Personal Communication
- Schreiber T., 1993 Extremely simple nonlinear noise reduction method, Phys.Rev.E, 47, 2401-2404
- Takens F.,1981 Detecting Strange Attractors in Turbulence, Lect.Notes in Math., No.898 Berlin-Heidelberg, N.Y., Springer, 366-381
- Theiler J., 1986 Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data Phys.Rev.A , 34, 2427
- Voros Z., 1994 The magnetosphere as a nonlinear system, Studia geophys et geode., 38, 168-186

Voros Z., Vero J., Kristek J., 1994 Nonlinear time series analysis of geomagnetic pulsations
Nonlinear Processes Geophysics 1, 145-155

Voros Z., 1995 Personal Communication

Waldmeier M., 1955 Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung
Akademische Verlagsgesellschaft, Geest&Portig K.-G., Leipzig, 141-150

Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., 1985 Determining Lyapunov exponents from
a time series, Physica D, 16, 285-317

APPENDIX 1
Atraktory

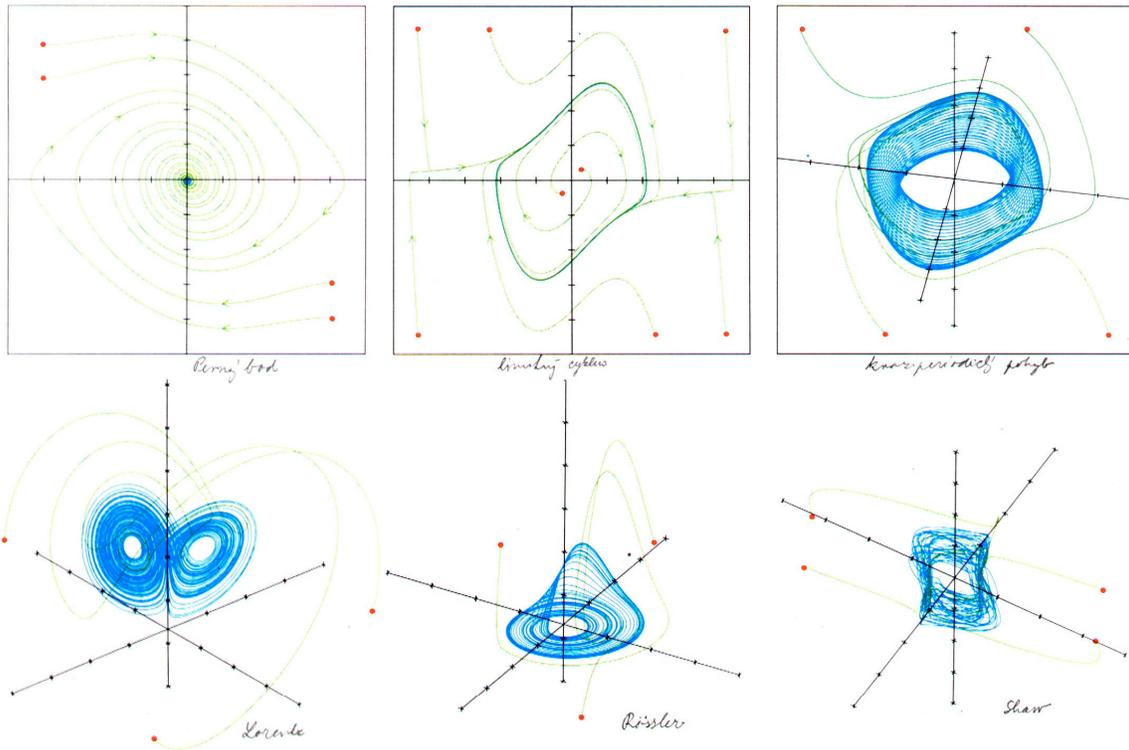


Bild 4: Atraktory jsou geometrické struktury, které charakterizují dlouhodobé chování v prostoru stavů. Zjednoděšeně lze říci, že atraktor je to, kam se systém pohybuje nebo odkud je přitahován. Atraktory jsou zde modře vykresleny a počáteční stavy jsou červené. Z počátečních stavů vycházející trajektorie (zelené) nakonec konvergují k atraktoru. Nejjednodušším případem je bodový atraktor (vlevo nahoře). Patří k tlumenému kyvadlu; nezávisle na tom, jak ho roztáhnete, vždy se vrátí do stejné rovnovážné polohy (vlevo v obrázku 3). Následně složitějším atraktorem je limitní cyklus (vlevo uprostřed), znázorněný jako uzavřená křivka v prostoru stavů. Limitní cyklus popisuje stabi-

le oscilace, jako u hodinového kyvadla nebo srdečního tepu. Složitější oscilace nebo kvaziperiodické chování patří k torusovému atraktoru (vpravo nahoře). Všechny tři atraktory jsou předvídatelné: jejich chování lze libovolně přesně předpovědět. Naopak chování chaotických atraktorek není předvídatelné; mají složitější geometrické struktury. Tři příklady chaotických atraktorek jsou v dolní řadě znázorněny. Jsou založeny na pracích (zleva doprava) Edwarda N. Lorenze, Otto E. Rösslera a jednoho z autorů (Shaw). Trajektorie v těchto obrázcích byly vypočítány z jednoduchých rovnic obyčejných diferenciálních rovnic v trojrozměrném prostoru stavů.

Ukážky rôznych atraktorov podľa Crutchfielda et al. 1989

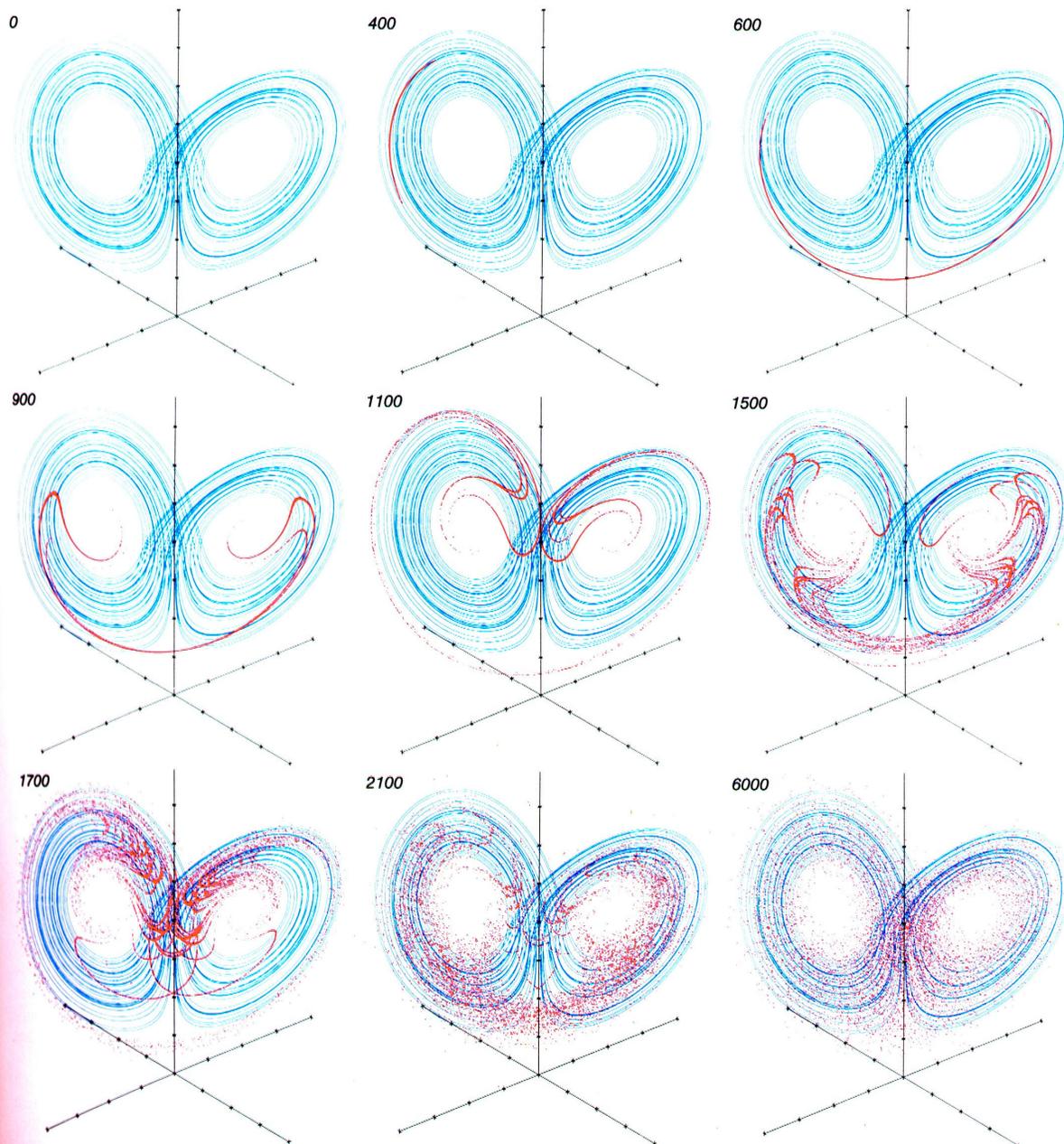


Bild 6: Die Divergenz benachbarter Trajektorien ist einer der Gründe, warum Chaos Unvorhersagbarkeit beinhaltet. Eine perfekte Messung ergäbe im Zustandsraum genau einen Punkt, aber jede Messung ist mit Fehlern behaftet, die eine Wolke von Ungenauigkeit erzeugen. Der wahre Zustand kann irgendwo innerhalb der Wolke sein. In diesem Beispiel wird am Lorenz-Attraktor die Unsicherheit durch eine Wolke von 10 000 roten Punkten dargestellt; sie liegen so nahe beieinander, daß man sie nicht un-

terscheiden kann. Wenn sich jeder Punkt nun entsprechend den Bewegungsgleichungen bewegt, wird die Wolke zunächst in ein langes dünnes Band gestreckt; es wird dann zudem mehrmals gefaltet, bis es schließlich den ganzen Attraktor überdeckt. Es ist jetzt unmöglich, Vorhersagen zu machen: Der Endzustand könnte irgendwo auf dem Attraktor sein. Bei einem vorhersagbaren Attraktor bleiben alle Endzustände nahe beieinander. Die Zeit ist in Einheiten von zweihundertstel Sekunden angegeben.

Pohyb vo fázovom priestore pre Lorenzov atraktor. Podľa Crutchfielda et al. 1989

Literatúra

Crutchfield J.P., Farmer J.D., Packard N.H., Shaw R.S., 1989 Chaos , In: Chaos und Fraktale, Heidelberg, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, 8 – 20

Rossler O.E., 1976 An Equation for Continuous Chaos, Phys.Lett., V.57A, No.5, p.397-398

Lorenz E.N., 1963 Deterministic Nonperiodic Flow, J.Atmos.Sci., V.20, No.2,p.130-141

Lorentzov atraktor môžeme vyjadriť rovnicami:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma(X - Y) & \dot{Y} &= rX - Y - XZ & \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned}$$

Kde σ , r , b sú parametre

Rovnice Lorentza patria do triedy autooscilačných systémov so zotrvačným samobudením.

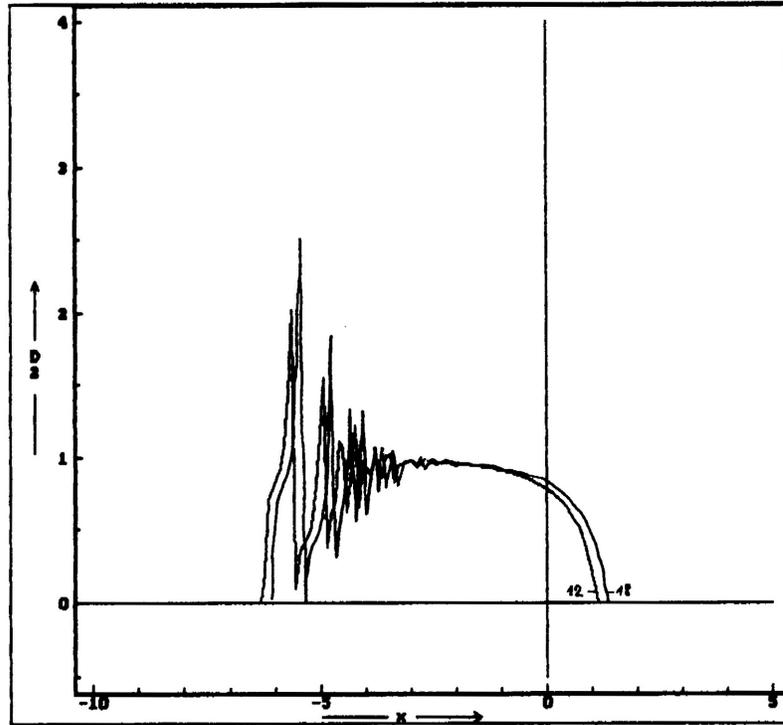
Rosslerov atraktor vyjadríme rovnicami :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z & \dot{Y} &= X + eY & \dot{Z} &= f - \mu Z + XZ \end{aligned}$$

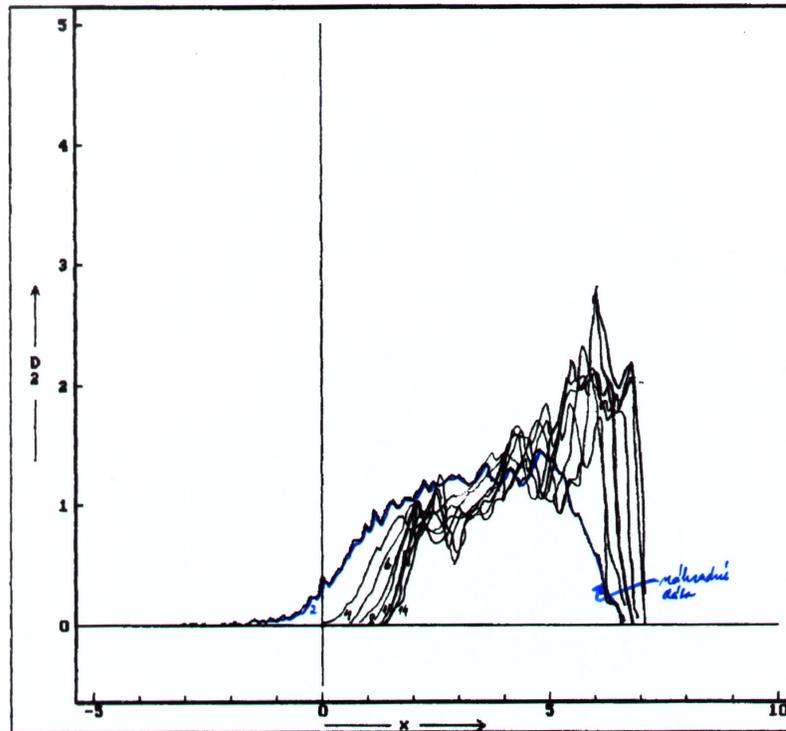
Kde e , f , μ sú parametre

APPENDIX 2

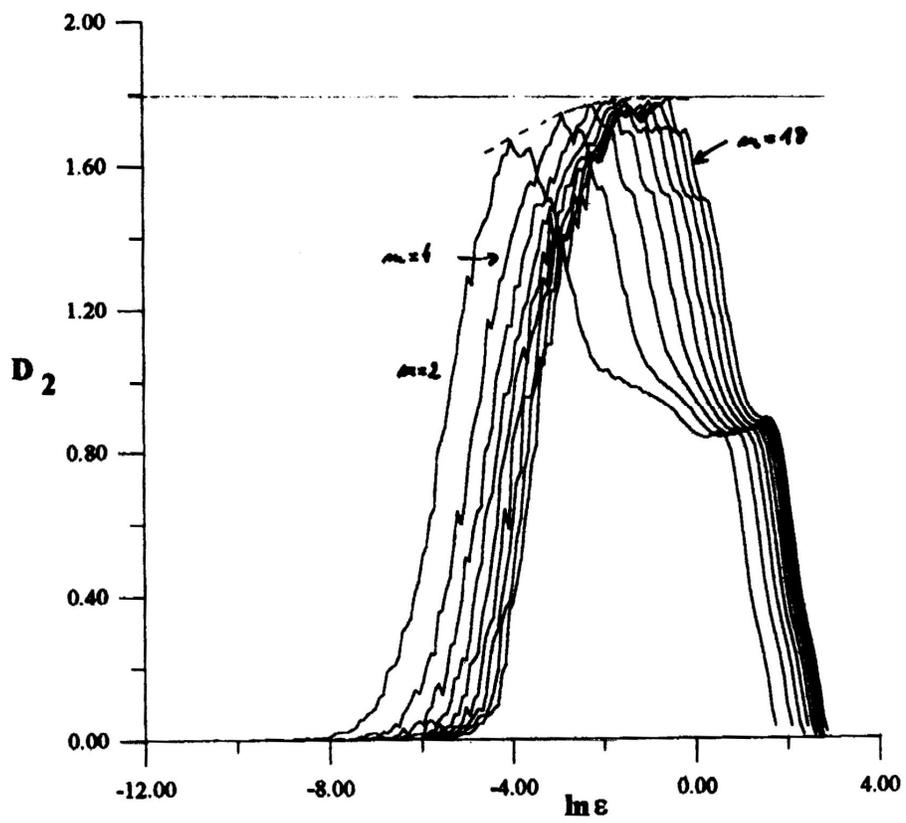
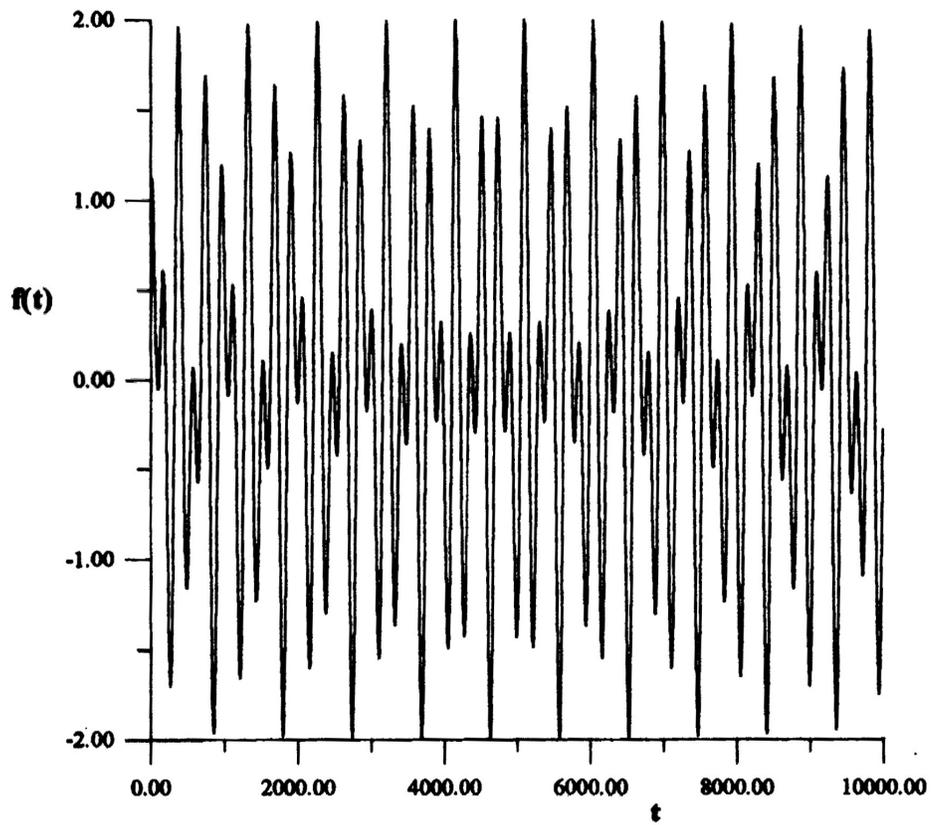
Ukážky určenia korelačných dimenzií niektorých funkcií



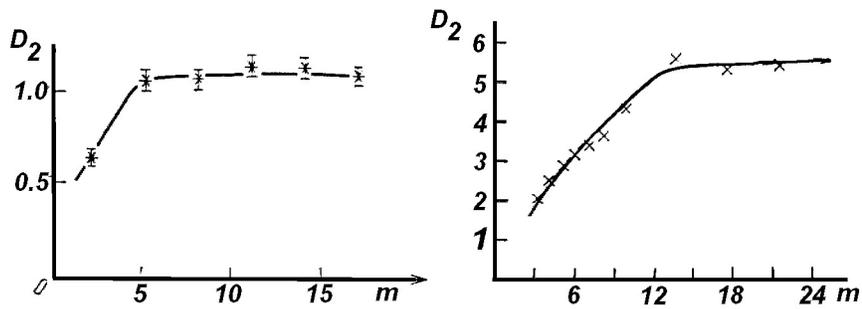
Určenie korelačnej dimenzie funkcie $\sin(x)$.



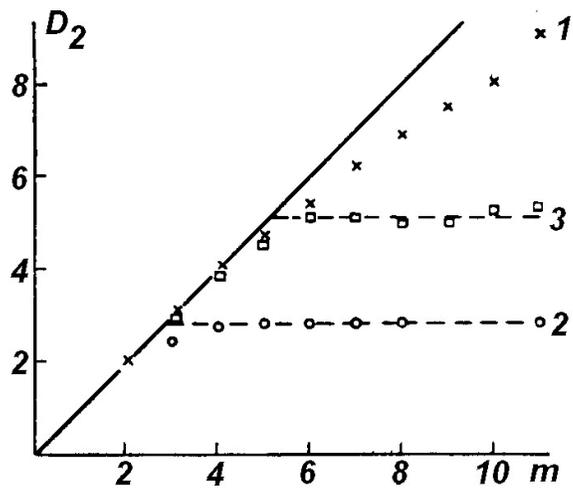
Porovnanie určenia korelačnej dimenzie z originálnych a náhradných dát.



Určenie korelačnej dimenzie pre zložitejšiu funkciu (3 periody).



Závislosť korelačnej dimenzie od vnorenej dimenzie m pre periodický režim (vľavo) a chaotický režim (vpravo).
Podľa Neymark J.I. a Landa D.S., 1987



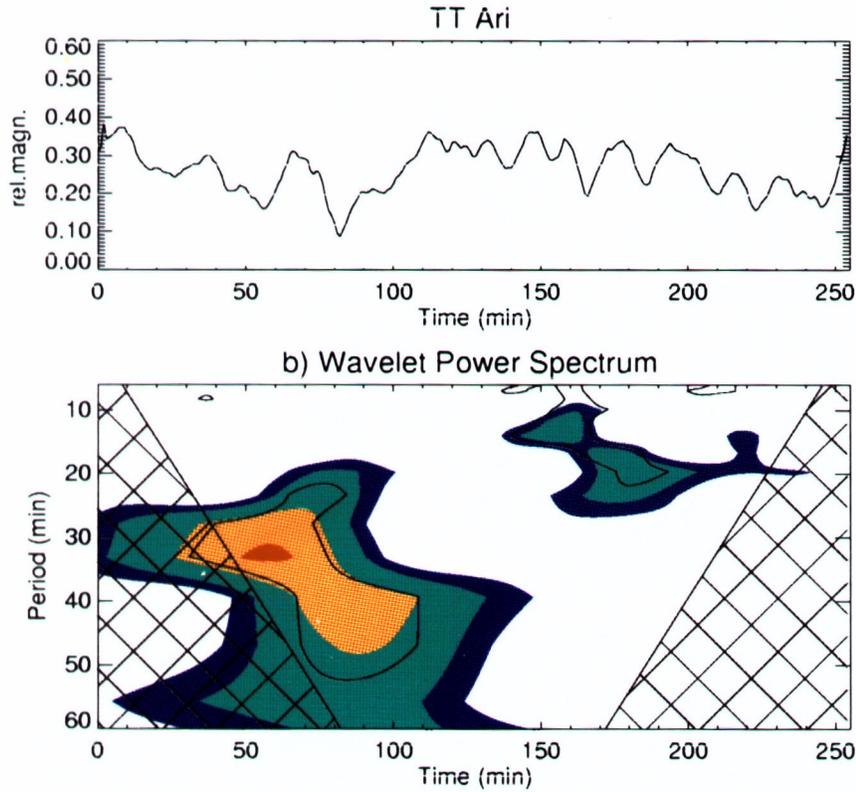
Závislosť korelačnej dimenzie od vnorenej dimenzie m . Prípady 2 a 3 chaotický režim, 1 je biely šum.
Podľa Neymark J.I. a Landa D.S., 1987

Literatúra:

Neymark J.I., Landa D.S., 1987 Stochastičeskije i chaotičeskije kolebania, Moskva, vyd. Nauka

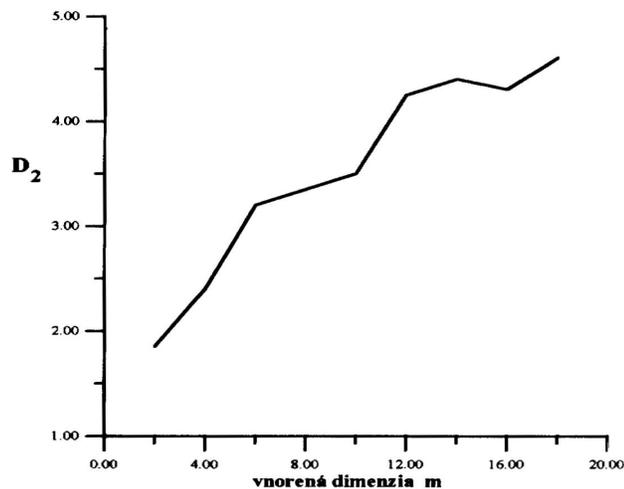
APPENDIX 3

Ukážka určenia korelačnej dimenzie meraní premennej hviezdy TT Ari



Relatívna magnitúda premennej hviezdy TT Ari versus čas a vlnkové výkonové spektrum časového radu.

Na vlnkovom výkonovom spektre časového radu TT Ari vidíme určité významné periódy (95% hladina spoľahlivosti, GWS šum), ale ako vidieť na ďalšom obrázku, kde je určenie korelačnej dimenzie časového radu TT Ari, zmeny jasnosti v skutočnosti predstavujú biely šum a periódy, ktoré sme našli, sú periódy zo spektra bieleho šumu.



Závislosť korelačnej dimenzie od vnorenej dimenzie m pre časový rad zmien jasnosti TT Ari.

APPENDIX 4

Ljapunovské exponenty

Trajektórie, ktoré vytvárajú stochastický atraktor, sú nestabilné podľa Ljapunova a musia mať aspoň jeden kladný Ljapunovský exponent.

Ljapunovské exponenty sa určujú nasledovne:

Majme dynamický systém, opísaný rovnicou:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

kde \mathbf{x} je vektor s komponentami x_1, x_2, \dots, x_n . Uvažujme dve blízke trajektórie $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{x}_1(t)$ vychádzajúce z bodov \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_{10} a nech $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_0$.

Ak sú trajektórie blízke, potom evolúciu vektora $\mathbf{y}(t)$ môžeme opísať linearizovanou rovnicou:

$$\dot{\mathbf{y}} = \left. \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \mathbf{y} \quad (2)$$

kde $\delta \mathbf{F} / \delta \mathbf{x}$ je matica s prvkami $\delta F_i / \delta x_j$. Je známe, že sústava rovníc (2) má n fundamentálnych partiálnych riešení $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{e}_i(t)$ takých, že pre každé z nich veličina:

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln (|\mathbf{e}_i(t)| / |\mathbf{e}_i(0)|) \quad (3)$$

existuje a má určitú, vo všeobecnosti odlišnú od ostatných, hodnotu. Tieto hodnoty $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ sa nazývajú Ljapunovskými exponentami. Dá sa ukázať, že pre ľubovoľný počiatočný vektor polohy $\mathbf{y}(0)$ je hodnota

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln (|\mathbf{y}(t)| / |\mathbf{y}(0)|)$$

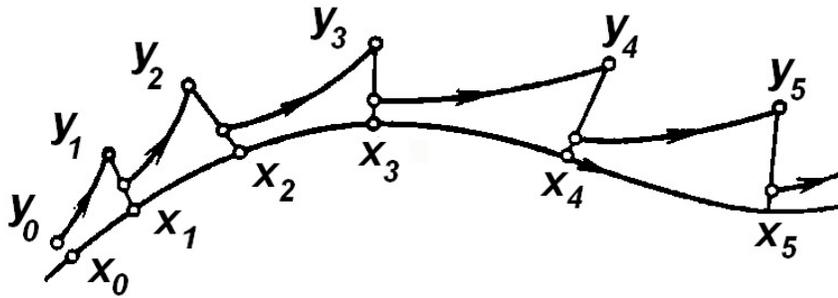
rovná $\lambda_1(\mathbf{x}_0)$ - maximálnemu Ljapunovskému exponentu.

Bezprostredný výpočet Ljapunovských exponentov podľa vzorca (3) pre systémy s exponenciálne nestabilnou trajektóriou je prakticky nemožný v dôsledku toho, že už pri veľmi malom $|\mathbf{y}(0)|$ hodnota $|\mathbf{y}(t)|$ s rastom t neohraničene vzrastá. Benettin G. et al. (1980) vypracovali nasledujúci algoritmus výpočtu Ljapunovských exponentov.

Vypočítajme najprv maximálny Ljapunovský exponent λ_1 . Vyberme si nejakú trajektóriu $\mathbf{x}(t)$ na intervale $0 \leq t \leq T$, ktorá je riešením rovnice (1) a ktorá husto pokrýva celý atraktor. Budeme riešiť rovnicu (2) súčasne s (1) v okolí tejto trajektórie pri nejakej počiatočnej podmienke \mathbf{y}_0 takej, že $|\mathbf{y}_0| = 1$. Za nejaký zvolený čas τ vektor $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(\tau)$. Dĺžku vektora \mathbf{y}_1 označme d_1 . Ďalej riešenie (2) pokračuje s druhou počiatočnou podmienkou $\mathbf{y}_{10} = \mathbf{y}_1 / d_1$. Hodnotu $\mathbf{y}(t)$ v okamihu $t=2\tau$ označíme \mathbf{y}_2 , dĺžku vektora \mathbf{y}_2 ako d_2 . V dôsledku mnohonásobného použitia opísanej procedúry (pozri obrázok) dostaneme postupnosť čísel d_i , kde $i=1,2,\dots,m=(T/\tau)$. Maximálny Ljapunovský exponent λ_1 bude:

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/(m*\tau)) \sum_{i=1}^m \ln (d_i) \quad (4)$$

Pre trajektórie ležiace na atraktore, hodnoty λ_i nezávisia od počiatočného bodu \mathbf{x}_0 na vybranej trajektórii, ale ani od samotnej trajektórie.



Obrázok k procedúre získania čísel d_i .

Gramm – Schmidtova procedúra

Aby sme mohli vypočítať ostatné Ljapunovské exponenty použijeme ortogonalizáciu pomocou procedúry Gramm – Schmidt. Ukážeme si to na príklade nasledujúceho exponentu λ_2 ($\lambda_2 \leq \lambda_1$). Označíme vektory y_i a y_i / d_i vypočítané pri výpočte λ_1 ako $w_i^{(1)}$ a $v_i^{(1)}$ ($v_i^{(1)} = w_i^{(1)} / d_i$). Ako počiatočný vektor pre rovnicu (2) zadáme vektor $v_0^{(2)}$ ortogonálny k vektoru $v_0^{(1)}$, teda zodpovedajúci rovnici skalárneho súčinu

$$(v_0^{(2)} \cdot v_0^{(1)}) = 0$$

Za čas τ vektor $v_0^{(2)}$ prejde na vektor $w_1^{(2)}$. Zostrojíme lineárnu kombináciu vektorov $w_1^{(2)}$ a $v_1^{(1)}$ tak, aby bola ortogonálna k vektoru $v_1^{(1)}$. Preto položíme:

$$u_1^{(2)} = w_1^{(2)} + \beta v_1^{(1)}, \text{ kde } \beta \text{ je nejaký súčiniteľ a budeme žiadať, aby}$$

$$(u_1^{(2)} \cdot v_1^{(1)}) = 0$$

Odtiaľ nájdeme $\beta = -(w_1^{(2)} \cdot v_1^{(1)})$. Ako počiatočný vektor pre druhý krok vezmeme:

$$v_1^{(2)} = u_1^{(2)} / d_1^{(2)} \text{ kde } d_1^{(2)} = |u_1^{(2)}|$$

Postupujúc analogicky na každom i -tom kroku, vypočítame všetky $d_i^{(2)}$. Lajpunovský exponent λ_2 sa určuje rovnicou:

$$\lambda_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/(m \cdot \tau)) \sum_{i=1}^m \ln(d_i^{(2)}) \quad (5)$$

Aby sme vypočítali j -ty Ljapunovský exponent, je potrebné na každom i -tom kroku urobiť operáciu ortogonalizácie vo vzťahu k vektorom $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(j-1)}$. Preto vytvoríme vektor:

$$u_i^{(j)} = w_i^{(j)} + \beta_1 v_i^{(1)} + \beta_2 v_i^{(2)} + \dots + \beta_{j-1} v_i^{(j-1)} \text{ a budeme žiadať, aby}$$

$$(u_i^{(j)} \cdot v_i^{(1)}) = 0, (u_i^{(j)} \cdot v_i^{(2)}) = 0, \dots, (u_i^{(j)} \cdot v_i^{(j-1)}) = 0$$

$$\text{Odtiaľ nájdeme } \beta_k = -(w_i^{(j)} \cdot v_i^{(k)}). \text{ Teda } u_i^{(j)} = w_i^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} (w_i^{(j)} \cdot v_i^{(k)}) v_i^{(k)}$$

Ljapunovský exponent bude:

$$\lambda_j = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/(m \cdot \tau)) \sum_{i=1}^m \ln(d_i^{(j)}) \quad (6)$$

kde $d_i^{(j)} = |\mathbf{u}_i^{(j)}|$

Takýmto spôsobom možno vypočítať postupne všetkých n Ljapunovských exponentov.

APPENDIX 5 Entropia a dimenzia

1. Topologická entropia

Charakterizuje stupeň rozbiehania blízkych fázových trajektórií. Ak sa trajektórie nerozbiehajú, alebo nie dostatočne silno je $h = 0$. V opačnom prípade $h > 0$

$$h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(N(\varepsilon, t)) / t$$

$N(\varepsilon, t)$ je počet rozlíšiteľných trajektórií v čase t , ktoré vychádzajú z okolia počiatočného bodu o polomere ε .

2. Entropia systému

Pre proces $\mathbf{x}(t)$, ktorý opisuje oscilácie stochastického generátora, musí existovať hraničná hustota pravdepodobností $w(\mathbf{x})$. Pokryjeme atraktor kockami s hranami $\varepsilon_i \leq \varepsilon$. Nech počet týchto kociek je $N(\varepsilon)$. Označme i – tu kocku symbolom ε_i . Pravdepodobnosť nájdenia zobrazeného bodu v kocke ε_i bude:

$$p_i = \int_{\varepsilon_i} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Podľa Shannona entropia systému je :

$$H(\varepsilon) = - \inf_{\varepsilon_i} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log_2 p_i$$

Môže existovať hranica. Limita entropie je dimenzia.

$$D_1 \equiv \sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1}$$

Toto sa nazýva informačná dimenzia D_1 , alebo dimenzia Renyi.

Entropia $H(\varepsilon)$ dosahuje najväčšiu hodnotu pri rovnosti pravdepodobností $p_1 = p_2 = \dots p_N = 1 / N(\varepsilon)$, ktoré je rovné $\log_2 N(\varepsilon)$. Potom hodnota σ dosahuje maximum:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_2 N(\varepsilon) / \log_2 \varepsilon^{-1}$$

a nazýva sa fraktálna dimenzia, alebo kapacita atraktoru D_0 .

3. Hausdorffova dimenzia d_H

Nech v n – rozmernom priestore je zadaná množina bodov. Pokryjeme ju n – rozmernými kockami s hranou dĺžky $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ a určíme veličinu

$$I_D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_D(\varepsilon)$$

$$\text{kde } I_D(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^D$$

Hausdorff ukázal, že existuje kritická hodnota D vyššie ktorej je $I_D = 0$ a nižšie $I_D = \infty$. Kritická hodnota $D = d_H$ sa nazýva Hausdorffovou dimenziou. Dá sa ukázať, že $d_H \leq d$.

Literatúra pre APPENDIX 4 a 5

Neymark J.I., Landa D.S., 1987 Stochastičeskije i chaotičeskije kolebania, Moskva, vyd, Nauka

Bennettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M., 1980 Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems ; a Method for Computing All of them. P.1,2, Meccanica V.15, No.1, p.9 – 20, 21 – 30

